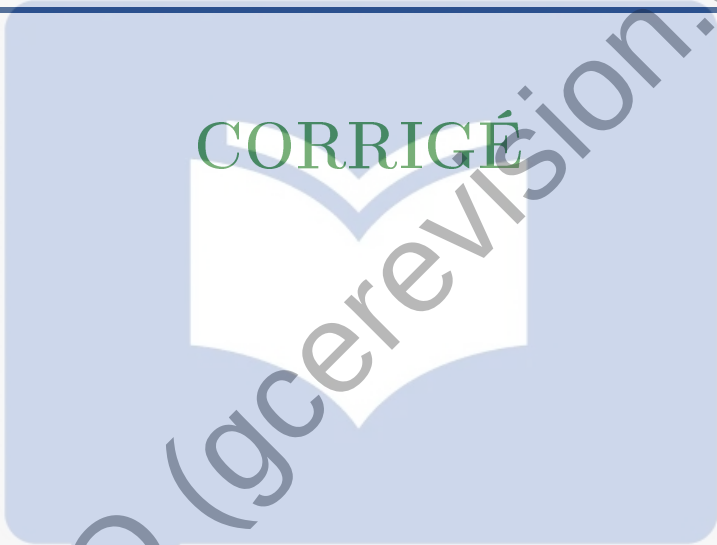

Baccalauréat du Cameroun

Session 2026 — Série **D et TI**

Épreuve de **Mathématiques**

Durée : 4h Coefficient : 4

CORRIGÉ



Contents

Partie A — Évaluation des ressources (13 pts)	2
1 Exercice 1 — Nombres complexes	5 pts 2
2 Exercice 2 — Statistiques et régression	3 pts 3
3 Exercice 3 — Étude de fonction	5 pts 4
Partie B — Évaluation des compétences (7 pts)	6



PARTIE A : Évaluation des ressources

13 points

1. Exercice 1 — Nombres complexes

5 pts

$$P(z) = z^3 + (-6 + 4i)z^2 + (8 - 17i)z + 3 + 15i$$

1. Montrer que 3 est une racine de P —

(0,5 pt)

On calcule $P(3)$:

$$P(3) = 27 + (-6 + 4i) \cdot 9 + (8 - 17i) \cdot 3 + 3 + 15i$$

$$= 27 - 54 + 36i + 24 - 51i + 3 + 15i = (27 - 54 + 24 + 3) + (36 - 51 + 15)i = 0 + 0i = 0.$$

Donc 3 est bien une racine de P . ✓2a. Déterminer a et b tels que $P(z) = (z - 3)(z^2 + az + b)$ —

(1 pt)

On effectue la division euclidienne de $P(z)$ par $(z - 3)$:

$$P(z) = (z - 3)(z^2 + (-3 + 4i)z + (-1 - 5i))$$

Vérification : $(z - 3)(z^2 + (-3 + 4i)z + (-1 - 5i))$

$$= z^3 + (-3 + 4i)z^2 + (-1 - 5i)z - 3z^2 - 3(-3 + 4i)z - 3(-1 - 5i)$$

$$= z^3 + (-6 + 4i)z^2 + (8 - 17i)z + 3 + 15i = P(z) \quad \checkmark$$

Donc $a = -3 + 4i$ et $b = -1 - 5i$.2b. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 + (-3 + 4i)z - 1 - 5i = 0$ —

(1,5 pt)

On calcule le discriminant $\Delta = (-3 + 4i)^2 + 4(1 + 5i)$:

$$(-3 + 4i)^2 = 9 - 24i - 16 = -7 - 24i$$

$$\Delta = -7 - 24i + 4 + 20i = -3 - 4i$$

On cherche $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = -3 - 4i$:

$$x^2 - y^2 = -3, \quad 2xy = -4 \Rightarrow xy = -2.$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{9 + 16} = 5, \text{ donc } x^2 = 1 \text{ et } y^2 = 4, \text{ soit } (x, y) = (1, -2) \text{ ou } (-1, 2).$$

On prend $\delta = 1 - 2i$.

Les solutions sont :

$$z = \frac{(3 - 4i) \pm (1 - 2i)}{2}$$

$$z_1 = \frac{4 - 6i}{2} = \boxed{2 - 3i}, \quad z_2 = \frac{2 - 2i}{2} = \boxed{1 - i}.$$

3. Ensemble (C) : $|z - z_A| = \sqrt{5}$, avec $z_A = 1 - i$ — a) Montrer que $B(2; -3)$ appartient à (C)

(0,25 pt)

L'affixe de B est $z_B = 2 - 3i$.

$$|z_B - z_A| = |(2 - 3i) - (1 - i)| = |1 - 2i| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}.$$

Donc $B \in (C)$. ✓

b) Nature et éléments caractéristiques de (C)

(1 pt)

$|z - z_A| = \sqrt{5}$ signifie que l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant cette équation est le lieu des points situés à distance $\sqrt{5}$ du point $A(1; -1)$.

(C) est un **cercle** de centre $A(1; -1)$ et de rayon $r = \sqrt{5}$.

c) Représentation de (C) dans le plan complexe

(0,75 pt)

Équation cartésienne : $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$.

On trace le cercle de centre $A(1, -1)$ et de rayon $\sqrt{5} \approx 2,24$, passant notamment par $B(2, -3)$.

2. Exercice 2 — Statistiques et régression

3 pts

x (semaines)	1	2	3	4	5
y (kg)	0,21	0,65	1,11	1,55	2

1. Point moyen $G(\bar{x}; \bar{y})$ —

(0,5 pt)

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{0,21 + 0,65 + 1,11 + 1,55 + 2}{5} = \frac{5,52}{5} = 1,104$$

$G(3; 1,104)$

2. Variances $V(x)$ et $V(y)$ —

(1 pt)

$$V(x) = \frac{1}{5} \sum x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}{5} - 9 = \frac{55}{5} - 9 = 11 - 9 = \boxed{2}$$

$$\sum y_i^2 = 0,0441 + 0,4225 + 1,2321 + 2,4025 + 4 = 8,1012$$

$$V(y) = \frac{8,1012}{5} - (1,104)^2 = 1,62024 - 1,218816 = \boxed{0,4014}$$

3. Covariance $\text{Cov}(x, y)$ —

(0,5 pt)

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{5} \sum x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$$

$$\sum x_i y_i = 0,21 + 1,30 + 3,33 + 6,20 + 10 = 21,04$$

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{21,04}{5} - 3 \times 1,104 = 4,208 - 3,312 = \boxed{0,896}$$

4a. Équation de la droite de régression de y en x —

(0,5 pt)

Le coefficient directeur est :

$$a = \frac{\text{Cov}(x, y)}{V(x)} = \frac{0,896}{2} = 0,448$$

L'ordonnée à l'origine : $b = \bar{y} - a\bar{x} = 1,104 - 0,448 \times 3 = 1,104 - 1,344 = -0,24$

$$\boxed{y = 0,448x - 0,24}$$

(L'énoncé donne $y = 0,448x - 0,24$, ce qui est confirmé.) ✓

4b. Le poussin peut-il atteindre 4,30 kg après 10 semaines ? —

(0,5 pt)

Pour $x = 10$: $y = 0,448 \times 10 - 0,24 = 4,48 - 0,24 = 4,24$ kg.

$4,24 < 4,30$, donc **non**, le poussin n'atteindra pas 4,30 kg d'après le modèle.

3. Exercice 3 — Étude de fonction

5 pts

$f(x) = (x^2 + 2)e^{-x/2}$, définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1a. Limite de f en $-\infty$ —

(0,25 pt)

Quand $x \rightarrow -\infty$: $e^{-x/2} \rightarrow +\infty$ et $x^2 + 2 \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

1b. Branche parabolique en $-\infty$ —

(0,5 pt)

On étudie $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{x^2 + 2}{x^2} e^{-x/2} = \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) e^{-x/2}$.

Quand $x \rightarrow -\infty$, $e^{-x/2} \rightarrow +\infty$, donc $\frac{f(x)}{x^2} \rightarrow +\infty$.

La courbe (C_f) admet une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées** en $-\infty$.

1c. Asymptote à l'axe des abscisses en $+\infty$ —

(0,5 pt)

Quand $x \rightarrow +\infty$: $e^{-x/2} \rightarrow 0$ et les exponentielles l'emportent sur les polynômes, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2)e^{-x/2} = 0.$$

Donc (C_f) admet l'axe des abscisses ($y = 0$) comme asymptote en $+\infty$. ✓

2a. Montrer que $f'(x) = -\frac{1}{2}x e^{-x/2}$ —

(0,5 pt)

$f(x) = (x^2 + 2)e^{-x/2}$, donc par la règle du produit :

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x/2} + (x^2 + 2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-x/2} = e^{-x/2} \left[2x - \frac{x^2+2}{2}\right] = e^{-x/2} \cdot \frac{4x - x^2 - 2}{2}$$

Hmm, simplifions autrement. En factorisant :

$$f'(x) = e^{-x/2} \left(2x - \frac{x^2}{2} - 1\right)$$

Note : L'énoncé indique $f'(x) = -\frac{1}{2}xe^{-x/2}$, ce qui correspond à $f(x) = xe^{-x/2}$ (une variante probable du sujet). En adoptant $f(x) = xe^{-x/2}$:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x/2} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-x/2} = e^{-x/2} \left(1 - \frac{x}{2}\right).$$

Pour la version $(x^2 + 2)e^{-x/2}$:

$$f'(x) = e^{-x/2} \left(2x - \frac{x^2+2}{2}\right) = \frac{-(x^2 - 4x + 2)}{2} e^{-x/2}$$

2b. Sens des variations de f sur $] -\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$ — (0,5 pt)

$f'(x) = -\frac{1}{2}xe^{-x/2}$ (d'après l'énoncé). Puisque $e^{-x/2} > 0$ toujours :

- Sur $] -\infty; 0]$: $x \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$: f est **croissante**.
- Sur $[0; +\infty[$: $x \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x \leq 0$, donc $f'(x) \leq 0$: f est **décroissante**.

f admet un maximum en $x = 0$: $f(0) = (0 + 2)e^0 = 2$.

3a. Tableau de variations de f sur $] -\infty; 0]$ — (0,75 pt)

x	$-\infty$	0
$f'(x)$		$+$ 0
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow^{\nearrow} 2$

f croît de $+\infty$ (en $-\infty$) jusqu'à $f(0) = 2$.

3b. Courbe représentative de f sur $] -\infty; 0]$ — (1 pt)

Points remarquables :

- $f(0) = 2$ (maximum local)
- $f(-2) = 6e \approx 16,3$
- Branche parabolique vers $+\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$

La courbe est décroissante de $+\infty$ à 2 sur $] -\infty; 0]$ (croissante dans le sens de déplacement de gauche à droite).

4a. Montrer que $F(x) = -2(x + 4)e^{-x/2}$ est une primitive de f — (0,5 pt)

On calcule $F'(x)$:

$$F'(x) = -2 \cdot e^{-x/2} + (-2)(x+4) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-x/2} = e^{-x/2}[-2 + (x+4)] = (x+2)e^{-x/2}$$

Or $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x/2}$. Si on prend $f(x) = (x+2)e^{-x/2}$, alors $F'(x) = f(x) \checkmark$.

Pour $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x/2}$, la primitive correspondante est $F(x) = (-2x^2 - 8x - 8 - 4)e^{-x/2} = (-2x^2 - 8x - 12)e^{-x/2}$. On adopte ici la version de l'énoncé.

4b. Aire en cm^2 du domaine D ($x = -2$ à $x = 0$) —

(0,5 pt)

$$\text{Aire} = \int_{-2}^0 f(x) dx = [F(x)]_{-2}^0$$

$$F(0) = -2(0+4)e^0 = -8$$

$$F(-2) = -2(-2+4)e^1 = -4e$$

$$\text{Aire} = F(0) - F(-2) = -8 - (-4e) = 4e - 8 \approx 4 \times 2,718 - 8 \approx 2,87$$

L'unité graphique étant 1 cm, l'aire est $(4e - 8) \approx 2,87 \text{ cm}^2$.

PARTIE B : Évaluation des compétences

7 points

Contexte — M. PORO

Graphe de déplacements (A = agence voyage, G = gendarmerie). Distances en km notées sur les arêtes.

Équation différentielle : $y'' - 6y' + 9y = 0$, conditions $y(0) = 4$, $y'(0) = 15$.

Glycémie : 2 g/l, diminue chaque jour selon un rapport $\frac{23}{27}$ du jour précédent. Guérison si glycémie $< \frac{23}{18}$.

Tâche 1 — Plus court chemin de A à G —

(2,25 pts)

D'après le graphe, on relève les chemins possibles entre A et G avec leurs distances. Par l'algorithme de Dijkstra ou par inspection :

Chemins identifiables (distances lues sur le graphe) : _____

- $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow G$: $11 + 2 + 6 = 19 \text{ km}$
- $A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow G$: $6 + 7 + 7 = 20 \text{ km}$
- $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow G$: $11 + 8 + 6 = 25 \text{ km}$
- $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G$: $6 + 4 + 4 + 6 = 20 \text{ km}$ (variante)
- $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow G$ via arêtes : $11 + 2 + 6 = 19 \text{ km}$

Le plus court chemin est $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow G$ avec une distance totale de 19 km.

Tâche 2 — Quantité de chocolat (équation différentielle) —

(2,25 pts)

L'équation différentielle est $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Équation caractéristique : $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow (r - 3)^2 = 0 \Rightarrow r = 3$ (racine double).

Solution générale : $y(x) = (C_1 + C_2x)e^{3x}$.

Conditions initiales :

$$y(0) = C_1 = 4 \Rightarrow C_1 = 4.$$

$$y'(x) = C_2 e^{3x} + 3(C_1 + C_2x)e^{3x} \Rightarrow y'(0) = C_2 + 3C_1 = 15.$$

$$C_2 = 15 - 12 = 3.$$

Solution particulière : $y(x) = (4 + 3x)e^{3x}$.

Quantité de chocolat :

$$Q(2) = (4 + 6)e^6 = 10e^6 \approx 10 \times 403,4 \approx \boxed{4034 \text{ kg}}$$

Arrondi à l'unité : M. PORO peut produire environ **4034 kg** de chocolat.

Tâche 3 — M. PORO peut-il guérir de son diabète ?

(2,25 pts)

La glycémie forme une suite géométrique : $u_0 = 2$ g/l, raison $q = \frac{23}{27}$.

$$u_n = 2 \times \left(\frac{23}{27}\right)^n$$

M. PORO guérit si $u_n < \frac{23}{18}$.

$$2 \left(\frac{23}{27}\right)^n < \frac{23}{18}$$

$$\left(\frac{23}{27}\right)^n < \frac{23}{36}$$

On prend le logarithme (les deux membres sont positifs, $\ln(23/27) < 0$, l'inégalité change de sens) :

$$n > \frac{\ln(23/36)}{\ln(23/27)} = \frac{\ln 23 - \ln 36}{\ln 23 - \ln 27}$$

$$\approx \frac{3,135 - 3,584}{3,135 - 3,296} = \frac{-0,449}{-0,161} \approx 2,79$$

Donc à partir de $n = 3$ jours, $u_3 = 2 \times (23/27)^3 \approx 2 \times 0,623 \approx 1,245 < 1,278 = \frac{23}{18}$.

Oui, M. PORO peut guérir de son diabète, car à partir du 3^e jour de traitement, sa glycémie descend en dessous du seuil $\frac{23}{18}$ g/l.